Vektorrechnung

(Version 25.06.02)

1. Begriffsklärung

1.1 linear abhängig

Erfüllen Vektoren $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$ … $(\neq \vec{o})$ des R^3 oder des R^2 die Gleichung $k_1\overrightarrow{a_1} + k_2\overrightarrow{a_2} + ... = \vec{o}$ mit mindestens zwei $k_i \neq 0$, dann heißen die Vektoren $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$ … linear abhängig.

1.2 kollinear *(linear abhängig)*

Zwei Vektoren sind kollinear zueinander, wenn der eine Vektor ein Vielfaches des Anderen ist.
z.B.: $\vec{a} = 2\vec{b} \;\; oder \;\; \vec{a} = -2\vec{b}$

1.3 geschlossener Vektorzug *(linear abhängig)*

$\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{a}$

1.4 komplanar *(linear abhängig)*

Drei Vektoren a, b, c heißen komplanar, wenn sich ein Vektor als Linearkombination der anderen darstellen lässt. → Sie liegen auf einer Ebene. Komplanare Vektoren liegen auf einer Ebene.

$\left|\vec{a} = r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}\right| \qquad r, s \in \Re \setminus \{0\}$

Mit drei nicht komplanaren Vektoren lässt sich der vierte Vektor im dreidimensionalen Raum immer darstellen.

1.5 Nullvektor, Neutrales Element

Der Vektor $\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ heißt Nullvektor. *(Beispiel angegeben für drei Dimensionen)*

1.6 Gegenvektor, Inverses Element

Zu jedem $\vec{a} \in V$ existiert ein $\overrightarrow{a'} \in V$ mit $\vec{a} + \overrightarrow{a'} = \vec{o}$. → $\overrightarrow{a'} = -\vec{a}$

1.7 Betrag/Länge eines Vektors

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

1.8 Einheitsvektor

$\overrightarrow{a^0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ Der Einheitsvektor $\overrightarrow{a^0}$ besitzt die Länge 1.

$$(\vec{a})^2 = \vec{a} \bullet \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|^2 \rightarrow (\vec{a})^2 = |\vec{a}|^2$$

1.9 Spurpunkte - Spurgeraden

Die Schnittpunkte einer Geraden mit den Koordinatenebenen heißen Spurpunkte der Geraden.

Die Punkte, in denen eine Ebene die Koordinatenachsen schneidet, heißen auch Spurpunkte. Die Verbindungsgeraden dieser Punkte sind die Spurgeraden der Ebene.

1.10 Projektion einer Geraden auf die x_1x_2-Ebene

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.11 kartesisches Koordinatensystem

Im kartesischen Koordinatensystem stehen drei Achsen orthogonal zueinander und das Koordinatensystem ist „positiv orientiert."

2. <u>Beispiele</u>

2.1 Beispiel zur Angabe einer Lösung eines linearen Gleichungssystems

$$x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 0 \quad ; \qquad L = \{x, y / x = -2y\}$$

2.2 Beispiel für einen Beweis mit den Mitteln der Vektorrechnung – Pythagoras

Behauptung: $\left|\overrightarrow{BC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2$ **; da** $|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$ **gilt:** $\vec{a}^2 + \vec{b}^2 = \vec{c}^2$

Vorraussetzung: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \bullet \vec{b} = 0$ **und** $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

Beweis:

$$\vec{c}^2 = a^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2$$
$$\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$$
$$\vec{c}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2$$

3. <u>Skalarprodukt</u>

3.1 Definition des Skalarprodukts

$\vec{a} \bullet \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

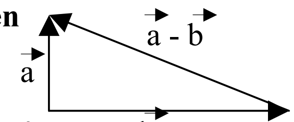
Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ *im dreidimensionalen Raum.*

Das Skalarprodukt ist eine reelle Zahl.
Dem Vektorraum wird eine reelle Zahl zugeordnet. $V \to \Re$

3.2 Algebraische Eigenschaften des Skalarprodukts

$\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$	Kommutativ-Gesetz	$\cancel{(\vec{a} \bullet \vec{b}) \bullet \vec{c} = \vec{a} \bullet (\vec{b} \bullet \vec{c})}$
$\vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$	Distributiv-Gesetz	$\cancel{r \bullet \vec{c} = \ldots}$
$r \cdot (\vec{a} \bullet \vec{b}) = (r \cdot \vec{a}) \bullet \vec{b}$		
$(r \cdot \vec{a}) \bullet (s \cdot \vec{b}) = (r \cdot s) \cdot \vec{a} \bullet \vec{b}$		

3.3 Rechtwinkligkeit von Vektoren

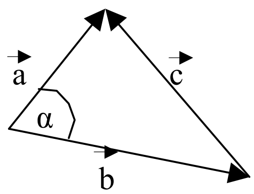


$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \bullet \vec{b} = 0$

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$

3.4 Winkel zwischen zwei Vektoren

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{a} \bullet \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$



Abgeleitet wird dieser Satz durch gleichsetzen von $|\vec{c}|^2$ mit dem Kosinussatz $|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$.

Der Schnittwinkel zweier Vektoren ist immer der kleinere Winkel! → Der Betrag des Skalarprodukts bedingt, dass der kleiner Winkel berechnet wird, denn es gilt: $\cos\alpha = -\cos(180° - \alpha)$.

Bei der Berechnung des Schnittwinkels zweier Geraden ist die <u>Vorraussetzung</u>, dass sie sich schneiden!!!

3.5 Spezialfälle

$\alpha = 0° \Leftrightarrow \vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 1$	Vektoren sind gleichgerichtet
$\alpha = 180° \Leftrightarrow \vec{a} \bullet \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$	Vektoren sind entgegengesetzt gerichtet
$\alpha = 90° \Leftrightarrow \vec{a} \bullet \vec{b} = 0$	Vektoren stehen senkrecht aufeinander

4. <u>Geraden</u>

4.1 Zweipunkteform der Geraden

$g:\vec{x}=\vec{a}+r\cdot(\vec{b}-\vec{a});r\in\Re$

4.2 Punkt-Richtungsform der Geraden – Parameterform der Geraden

$g:\vec{x}=\vec{a}+r\cdot\vec{u}$
Der Vektor a ist der Ortsvektor des Punktes A. Der Vektor $\vec{u}$ ist der Richtungsvektor.
„r“ ist der Parameter.

4.3 Umformen von zweidimensionalen Funktionen von Geraden

$$y=m\cdot x+c \Leftrightarrow g:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\c\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$$

4.4 Schnitt zweier Geraden

Berechnung durch Gleichsetzen der Geraden und bestimmen der Parameter r und s.

$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\text{ und }\quad h:\vec{x}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix}\ ;\quad g\cap h$$

a) *windschief*

Die Geraden haben unterschiedliche Richtungen und sind nicht parallel. Sie besitzen keinen Schnittpunkt ($L=\{\ \}$). $\vec{b}$ und $\vec{d}$ sind linear unabhängig.

b) *parallel*

Die Geraden besitzen keinen Schnittpunkt ($L=\{\ \}$) $\vec{b}$ und $\vec{d}$ sind linear abhängig.

c) *identisch*

Die Geraden besitzen „unendlich viele“ Schnittpunkte.
($L=\{r,s\in\Re / r=v\cdot s+w\}\ \textit{für}\ v,w\in\Re$); $\vec{b}$ und $\vec{d}$ sind linear abhängig.

d) *Schnittpunkt*

Die Geraden besitzen einen Schnittpunkt ($L=\{r=v,s=w\}\ \textit{für}\ v,w\in\Re$)
$\vec{b}$ und $\vec{d}$ sind linear unabhängig. $g\cap h=S(x;y;z)$

5. <u>Ebenen</u>

5.1 Parameterform der Ebene

$E: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$ A, B, C sind Punkte der Ebene

$E: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$

A sei ein Punkt mit dem Ortsvektor $\vec{a}$. $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind linear unabhängige Vektoren. Die Punkte X mit den Ortsvektoren $\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$ bilden eine Ebene durch den Punkt A. $\vec{a}$ heißt Stützvektor (Aufpunktvektor). $\vec{u}$ und $\vec{v}$ nennt man die Spannvektoren der Ebene.

5.2 Koordinatenform der Ebene

$E: a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$ $a, b, c, d \in \Re$

5.3 Achsenabschnittsform der Ebene

Die Achsenabschnittsform erleichtert die Angabe der Spurpunkte und das Zeichnen der Ebene, da die Schnittpunkte mit den Achsen direkt angegeben werden können.

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ $a, b, c \in \Re$

Schnittpunkt mit x-Achse: P(a;0;0)
Schnittpunkt mit y-Achse: P(0;b;0)
Schnittpunkt mit z-Achse: P(0;0;c)

5.4 Normalenform der Ebene

$E: (\vec{x} - \vec{p}) \bullet \vec{n} = 0$ *oder alternativ* $E: \vec{x} \bullet \vec{n} - d = 0$ ($E: \vec{x} \bullet \vec{n} - \vec{p} \bullet \vec{n} = 0$)
$\vec{p} \in E; \vec{n} \neq \vec{0}; \vec{n} \perp E$

Beispiel: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$ *entspricht* $\vec{x} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + 9 = 0$

5.5 Hessesche Normalenform $E: (\vec{x} - \vec{p}) \bullet \overrightarrow{n^0} = 0$; Einheitsnormalenvektor!

$$E: (\vec{x} - \vec{p}) \bullet \overrightarrow{n^0} = 0 \Leftrightarrow E: \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 - r}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = 0 \Leftrightarrow E: n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 - r = 0$$

Um den Abstand eines Punktes P zur Ebene zu berechnen, wird der Punkt in die Hessesche Normalenform eingesetzt, das Ergebnis gibt die Strecke d(P;E) an.

5.6 Umformen der Parameterform in die Koordinatenform

$$E:\vec{x}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\rightarrow \begin{matrix}x=a_1+r\cdot b_1+s\cdot c_1\\ y=a_2+r\cdot b_2+s\cdot c_2\\ z=a_3+r\cdot b_3+s\cdot c_3\end{matrix}$$

Durch eliminieren von r und s erhält man die Koordinatenform.

5.7 Umformen der Parameterform in die Normalenform

$$E:\vec{x}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$$ Es gilt $\vec{n}\bullet\vec{b}=0$ und $\vec{n}\bullet\vec{c}=0$! $\vec{a}$ ist Aufpunktvektor von E!

Das Gleichungssystem der Skalarprodukte wird zu den Koordinaten n_1, n_2, n_3 des Normalenvektors aufgelöst. Für n_1 *(bzw. n_2 oder n_3)=v* $(v\in\Re)$ ergeben sich die anderen Koordinaten eines Normalenvektors.

$\rightarrow E:[\vec{x}-\vec{a}]\bullet\vec{n}=0$

5.8 Umformen der Koordinatenform in die Parameterform

$E:a\cdot x+b\cdot y+c\cdot z=d \rightarrow x=\frac{d}{a}-\frac{b}{a}\cdot y-\frac{c}{a}\cdot z \rightarrow$ y = r ; z = s; $x=\frac{d}{a}-r\cdot\frac{b}{a}-s\cdot\frac{c}{a}$

$$L=(x;y;z)=\left(\frac{d}{a}-r\cdot\frac{b}{a}-s\cdot\frac{c}{a};r;s\right)$$

$$E:\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{d}{a}-r\cdot\frac{b}{a}-s\cdot\frac{c}{a}\\r\\s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{d}{a}\\0\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-\frac{b}{a}\\1\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-\frac{c}{a}\\0\\1\end{pmatrix}$$

Man stellt nach x um und setzt y=r und z=s. In der Parameterform ergibt sich die angegebene Gleichung. y=1r und z=1s (s.o.), x=…(mit r, s) werden wie genannt eingesetzt. Welche Koordinate durch r und s ersetzt wird ist grundsätzlich egal.

5.9 Umformen der Koordinatenform in die Normalenform

$$E:a\cdot x+b\cdot y+c\cdot z=d \Leftrightarrow \vec{x}\bullet\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}-d=0 \Leftrightarrow [\vec{x}-\vec{p}]\bullet\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0$$

Ist $E:a\cdot x+b\cdot y+c\cdot z=d$ die Koordinatengleichung der Ebene, so ist $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der Ebene.

Ein Aufpunktvektor $\vec{p}$ wird durch Einsetzten zweier Zahlen in die Koordinatenform bestimmt.

5.10 Umformen der Normalenform in die Parameterform

$E:[\vec{x}-\vec{a}]\bullet\vec{n}=0 \quad \rightarrow \quad E:\vec{x}=\vec{a}+r\cdot\vec{u}+s\cdot\vec{v}$

a) *Koordinatenform bilden*

3 Punkte (mit der Koordinatenform) bestimmen → 3 Punkte-Form der Ebene

b) *Lineares Gleichungssystem der Skalarprodukte des Normalen- mit den Spannvektoren*

$\vec{u}\bullet\vec{n}=0$ und $\vec{v}\bullet\vec{n}=0$

$u_1n_1+u_2n_2+u_3n_3=0$ → Bestimmen zweier Spannvektoren durch Einsetzen

Der Aufpunktvektor der Normalenform wird für die Parameterform übernommen.

5.11 Umformen der Normalenform in die Koordinatenform

$$E:[\vec{x}-\vec{a}]\bullet\vec{n}=0 \quad \rightarrow \quad E:\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\right]\bullet\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3=a_1n_1+a_2n_2+a_3n_3$$

5.12 Schnitt zweier Ebenen

a) <u>Parameterform</u>

$$E_1:\vec{x}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}; \qquad E_2:\vec{x}=\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{pmatrix}+u\cdot\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\f_3\end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{array}{l}a_1-d_1+r\cdot b_1+s\cdot c_1-t\cdot e_1-u\cdot f_1=0\\a_2-d_2+r\cdot b_2+s\cdot c_2-t\cdot e_2-u\cdot f_2=0\\a_3-d_3+r\cdot b_3+s\cdot c_3-t\cdot e_3-u\cdot f_3=0\end{array}\right|$$

Zwei Parameter <u>einer</u> Geraden eliminieren und nach einem verbliebenen Parameter auflösen. Dieser Parameter in die Ebenengleichung eingesetzt, gibt die Parameterform der Schnittgeraden an.

b) <u>Koordinatenform</u>

$E_1:a\cdot x+b\cdot y+c\cdot z=1$; $E_2:d\cdot x+e\cdot y+f\cdot z=1$

$$\left|\begin{array}{l}a\cdot x+b\cdot y+c\cdot z=1\\d\cdot x+e\cdot y+f\cdot z=1\end{array}\right| \Leftrightarrow x=\ldots\cdot y+\ldots \Rightarrow z=\ldots\cdot y+\ldots \Rightarrow \begin{array}{c}x=\ldots\cdot r+\ldots\\y=r\\z=\ldots\cdot r+\ldots\end{array} \Leftrightarrow g:\vec{x}=\begin{pmatrix}\ldots\\0\\\ldots\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}\ldots\\1\\\ldots\end{pmatrix}$$

Im Gleichungssystem wird eine Koordinate eliminiert. Man erhält z.B. x in Abhängigkeit von y. Setzt man diesen Term in eine Ursprungsgleichung ein, erhält man z.B. z in Abhängigkeit von y. Die Koordinaten können dann alle in Abhängigkeit von z.B. y ausgedrückt werden. Setzt man y = r erhält man durch ausklammern von r die Parameterform der Schnittgeraden.

6. <u>Abstandsberechnung</u>

6.1 Abstand windschiefer Geraden

$g: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$	$h: \vec{x} = \vec{q} + s \cdot \vec{v}$	
$g \in E_g$	$h \in E_h$	$E_g \parallel E_h$
$E_g: \vec{x} = \vec{p} + r_1 \cdot \vec{u} + s_1 \cdot \vec{v}$	$E_h: \vec{x} = \vec{q} + r_2 \cdot \vec{u} + s_2 \cdot \vec{v}$	$\vec{n}$: Normalenvektor der Ebenen

Der Abstand zwischen den beiden am Nähesten gelegenen Punkten der Geraden ist gleich der Strecke eines beliebigen Punktes zur anderen Ebene.

$$d(g;h) = d(E_g;E_h) = d(Q;E_g) = d(P;E_h) = (\vec{p} - \vec{q}) \bullet \overrightarrow{n^0}$$

6.2 Abstand zwischen einer Geraden und einem Punkt (=kürzeste Strecke)

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}; \qquad \mathrm{R}(\mathrm{r}_1; \mathrm{r}_2; \mathrm{r}_3)$$

a) Formel mit cos und Kosinussatz hergeleitet

$$\left|\overrightarrow{RF} = \sqrt{(\vec{r} - \vec{a})^2 - \left[(\vec{r} - \vec{a}) \bullet \overrightarrow{b^0}\right]^2}\right| \qquad \textit{abgeleitet von: } \cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{AF}\right|}{\left|\overrightarrow{AR}\right|} \textit{ und Kosinussatz}$$

$\vec{r}$: Punkt R $\vec{a}$: Aufpunkt der Geraden $\overrightarrow{b^0}$: Einheitsrichtungsvektor der Geraden
F : Fußpunkt (des Lots)

b) Schnitt der Geraden mit der senkrecht zur Geraden stehenden Ebene, die R enthält, mit Hilfe der Normalenform

$$E: \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = 0 \quad g \cap E \textit{ : Einsetzen der Geraden in die Ebenengleichung.}$$

$$\left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = 0$$

→ r = … → P(…) *Fußpunkt/Schnittpunkt* → $d(P;g) = \left|\overrightarrow{PR}\right|$

c) *Schnitt zwischen der zur Geraden senkrechten Ebene durch R mit der Geraden mit Hilfe der Koordinatenform*

$E: b_1 x + b_2 y + b_3 z = c = b_1 r_1 + b_2 r_2 + b_3 r_3$ c: Konstante; Koordinatenform der Ebene

Die Koeffizienten der Koordinatenform der Ebene bilden die Koordinaten der Normalen der Ebene und umgekehrt. Der Richtungsvektor der Geraden ist ein Normalenvektor der Ebene.

$g \cap E: b_1(a_1 + r \cdot b_1) + b_2(a_2 + r \cdot b_2) + b_3(a_3 + r \cdot b_3) \Leftrightarrow r = ...$

Die Koordinaten des Fußpunkts F erhält man durch Einsetzen von r in die Geradengleichung. $|\overrightarrow{FR}| = d(F;R) = d(g;R)$

d) *Schnitt zwischen den Senkrechten zur Geraden g und dem Punkt R*

$\vec{r} = \vec{a} + r \cdot \vec{b} + \vec{n}$
$\vec{n}$: Vektor von der Geraden zu R *(senkrecht zur Geraden; Vektor von Fußpunkt zu R)*

$$\vec{n} \perp \vec{b} \Leftrightarrow b_1 n_1 + b_2 n_2 + b_3 n_3 = 0 \Leftrightarrow n_3 = \frac{-b_1 n_1 - b_2 n_2}{b_3} \Leftrightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \dfrac{-b_1 n_1 - b_2 n_2}{b_3} \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{aligned} r_1 &= a_1 + r \cdot b_1 + n_1 \\ r_2 &= a_2 + r \cdot b_2 + n_2 \\ r_3 &= a_3 + r \cdot b_3 + \frac{-b_1 n_1 - b_2 n_2}{b_3} \end{aligned} \right|$$

Das Gleichungssystem nach r, n_1 und n_2 auflösen. Setzt man r in die Geradengleichung ein, erhält man die Koordinaten des Fußpunkts F. Mit n_1 und n_2 lässt sich der Vektor $\vec{n}$ bestimmen. $|\vec{n}| = d(F;R) = d(g;R)$

7. <u>Geraden, Punkte und Ebenen</u>

7.1 Schnittmengen von Gerade und Ebene

$E:\vec{x}=\vec{a}+r\cdot\vec{u}+s\cdot\vec{v}$ $\qquad\qquad$ $g:\vec{x}=\vec{b}+t\cdot\vec{w}$

a) *Gerade schneidet Ebene*

Schnitt-/Durchstoßpunkt
$L=\{r=w,s=v,t=w\}\ \text{für}\ u,v,w\in\Re$

b) *Gerade liegt parallel zur Ebene*

$\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ sind komplanar ($p\cdot\vec{u}+q\cdot\vec{v}=\vec{w}\ \text{für}\ p,q\in\Re$) und $\vec{b}\notin E$
$L=\{\ \}$

c) *Gerade liegt in der Ebene*

$\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ sind komplanar ($p\cdot\vec{u}+q\cdot\vec{v}=\vec{w}\ \text{für}\ p,q\in\Re$) und $\vec{b}\in E$
$L=\{r,s,t\in\Re/0=\ldots\cdot r+\ldots\cdot s+\ldots\cdot t\}$

7.2 Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene

$E:\vec{x}=\vec{a}+r\cdot\vec{u}+s\cdot\vec{v}$ $\qquad\qquad$ $g:\vec{x}=\vec{b}+t\cdot\vec{w}$

$\sin\alpha=\frac{|\vec{u}\bullet\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|}=\cos\beta$ $\qquad$ α : Winkel zwischen Geraden und Ebene

β : Winkel zwischen Geraden und Normalen

7.3 Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen

Der Schnittwinkel zweier Ebenen ist gleich dem Schnittwinkel der beiden Normalenvektoren der Ebenen.

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{n_1}\bullet\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|}$$

7.4 Berechnung des Abstandes zwischen einem Punkt und einer Ebene *(kürzeste Strecke)*

$E:(\vec{x}-\vec{p})\bullet\vec{n}=0$; R ist der Punkt mit dem Vektor $\vec{r}$.

$$d(R;E)=\left|(\vec{r}-\vec{p})\bullet\overrightarrow{n^0}\right|$$

Der Abstand einer Ebene zu einer parallelen Geraden oder Ebene erfolgt durch Wahl eines Punktes der Geraden bzw. Ebene, von dem der Abstand bestimmt wird.