Kurvendiskussion einer gebrochen-rationalen Funktion *(Ver. 22.02.06)*

Bei Grenzwerten auch Regel von de l'Hospital beachten!

1.) Untersuche, ob es sich um eine **echt-/unechtgebrochen-rationale Funktion** handelt.
echt-gebrochen-rationale Funktion: Grad(Zähler) < Grad(Nenner)
unecht-gebrochen-rationale Funktion: Grad(Zähler) ≥ Grad(Nenner)

2.) Bestimme den **Definitionsbereich**: Funktion nicht definiert, für Werte von x, für die der Nenner 0 ergibt, z.B.: f(x)=1/(2x) ⇨ Definitionsbereich ID = $\Re \setminus \{0\}$: Definiert im Bereich der reellen Zahlen außer für x = 0

$x^2 + 1 = 0$ ⇨ es gibt keine Definitionslücke, da $\sqrt{-1}$ keine Lösung in $\Re$ besitzt

3.) **Symmetrieeigenschaften** (zu 2. Achse und Ursprung bei echt-gebrochenen Funktionen)

Achsensymmetrie: $f(-x) = f(x)$ Punktsymmetrie: $f(-x) = -f(x)$

Die Symmetrieeigenschaften bei Auftreten in Zähler und Nenner verhalten sich wie folgt:

$f(x) = \frac{Achsensymmetrie}{Achsensymmetrie} \to Achsensymmetrie$; $f(x) = \frac{Punktsymmetrie}{Punktsymmetrie} \to Achsensymmetrie$

$f(x) = \frac{Punktsymmetrie}{Achsensymmetrie} \to Punktsymmetrie$; $f(x) = \frac{Achsensymmetrie}{Punktsymmetrie} \to Punktsymmetrie$

Liegt in Zähler oder Nenner keine Symmetrie vor, so ist die Gesamtfunktion nicht symmetrisch.

4.) **Verhalten an den Definitionslücken** (Beispiel: Definitions-Lücke bei x=1)

von rechts/X > 1: $\lim_{x\to 1}[f(x)] = \lim_{x\to 1}(\frac{3x^2-2x}{5x-5}); x \to 1 \Rightarrow f(x) \to +\infty$; da $\frac{1}{0{,}000\ldots1} \to +\infty$

von links/X < 1: $\lim_{x\to 1}[f(x)] = \lim_{x\to 1}(\frac{3x^2-2x}{5x-5}); x \to 1 \Rightarrow f(x) \to -\infty$; da $\frac{1}{-0{,}000\ldots1} \to -\infty$

5.) **Polstellen/behebbare Definitionslücken** *(siehe Definitionsbereich/-lücken)*
Bedingung: Nenner = 0 = *z.B.:* $(x-2)^2$ ⇨ x = 2 die Polstelle/Lücke liegt bei x = 2

Es handelt sich um eine behebbare Definitionslücke, wenn $\lim_{x\to Lücke} f(x)$ existiert. z.B.: $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$
Dieser Grenzwert existiert, wenn der Zähler an der Definitionslücke den Wert 0 annimmt. Ist der Zähler ungleich 0, handelt es sich um eine Polstelle. Die Funktion nähert sich an der Polstelle der senkrecht zur x-Achse stehenden Polgeraden an, ohne diese zu berühren.

6.) **Asymptote/Näherungsfunktion; Verhalten für betragsgroße x-Werte**
Die Asymptote ist eine Funktion, Gerade, Parabel, ... der sich der Graph nähert, die er aber nicht berührt. Die Funktion der Asymptote erhält man durch Division des Zählers durch den Nenner (Polynomdivision), wobei der gebrochen-rationale Teil des Ergebnisses zu vernachlässigen ist, da er für große Wert von x den Wert 0 annimmt.

$f(x) = \frac{x^2}{x^2+2} = x^2 : (x^2+2) = 1 - \frac{2}{x^2+2}$ ⇨ $f_A(x) = 1$ | $f(x) = \frac{x^3}{x^2+2} = x^3 : (x^2+2) = x - \frac{2x}{x^2+2}$ ⇨ $f_A(x) = x$

$f(x) = \frac{-x^3+2}{2x} = (-x^3+2) : (2x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x}$ ⇨ $f_A(x) = -\frac{1}{2}x^2$

Beispiel 1: $f(x) = \frac{x^2}{x^2+2}$; Für $x \to +\infty$ / $x \to -\infty$ strebt $f(x) \to 1$ / $f(x) \to 1$ $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$

Für das Grenzwertverhalten bei großen Werten von x ist der Teil der Funktion aus der Polynomdivision mit größtem Grad entscheidend, dieser bestimmt das Verhalten der Funktion im genannten Bereich.

Ist der gebrochenrationale Teil (höchsten Grades) der Funktion aus der Polynom-Division positiv, so nähert sich der Graph der Asymptote von oben, ist er negativ, so nähert er sich der Asymptote von unten.

7.) **Nullstellen [und Schnittpunkt mit Y-Achse]**
Bedingung: $f_{Zähler}(x_N) = 0$ [Schnittpunkt mit Y-Achse: $S_y(0; f(0))$]

z.B.: $f(x) = \frac{x+3}{x^3-1}$ ⇨ $x_N + 3 = 0$ ⇨ $x_N = -3$ ⇨ die Funktion hat eine Nullstelle bei P(-3/0)

8.) **Extremstellen**
Bedingung: $f'_{Zähler}(x_E) = 0$ *und*
$f''(x_E) < 0$ ⇨ lokales Maximum/Hochpunkt *oder* $f''(x_E) > 0$ ⇨ lokales Minimum/Tiefpunkt
Im Falle $f''(x_E) = 0$ *und* $f'''(x_E) \neq 0$ handelt es sich um einen Sattelpunkt.

9.) **Wendestellen**
Bedingung: $f''_{Zähler}(x_W) = 0$ *und* $f'''(x) < 0$ ⇨ Rechtskrümmung *oder* $f'''(x) > 0$ ⇨ Linkskrümmung

10.) **Graph der Funktion** zeichnen
Null-, Extrem-, Wende-, Polstellen und Definitionslücken sowie Asymptote und Polgeraden in einen Graphen einsetzen und diesen durch weitere Punkte sinnvoll ergänzen um den Graphen zu zeichnen.